Demostrar o no demostrar en la geometría escolar. Esa es la cuestión

Fernando Angulo Díaz

ferandi28@hotmail.com
Institución Educativa Normal Superior Santiago de Cali.
Universidad del valle-Instituto de Educación y Pedagogía.
Estudiante de Maestría en Educación Matemática-Univalle.

Resumen

El uso adecuado de un sistema de geometría dinámica (SGD) puede favorecer el aprendizaje de la demostración en contextos escolares. Quizás el papel más relevante de la demostración en un ambiente dinámico está como herramienta para *explicar* y en esta perspectiva se abordaran algunos aspectos cruciales y se darán unos cuantos ejemplos concretos. La necesidad de la explicación en los casos donde los resultados están ya validados por el mismo ambiente y hay un fuerte convencimiento por parte del estudiante, debe recaer en la "sorpresa" de tales resultados para orientar los esfuerzos en entender *por qué son verdaderos.*

Presentación

Se podría considerar normal que en una clase de geometría, en el ambiente estático "de lápiz y papel", cuando un profesor de secundaría ha "enseñado" (simplemente como sinónimo de mostrar) algunas demostraciones típicas de la geometría euclidiana, tal vez empleando el clásico modelo a dos columnas (tradicional de la educación secundaria y universitaria anglosajona y que también reinó durante casi todo el siglo pasado en nuestras aulas de clase), pida posteriormente a sus alumnos -por citar un ejemplo- la demostración de que las diagonales de un rectángulo son congruentes, lo que él seguramente espera es una demostración más o menos formal.

Tal vez el significado más generalizado que posee la palabra "demostrar" para los profesores de Matemáticas corresponda muy seguramente a un encadenamiento lógico de premisas que se conocen de antemano o que se van obteniendo de otras conocidas, hasta llegar a la tesis o resultado final que se desea; con respeto al ejemplo señalado, la práctica confirma que generalmente los estudiantes se limitan a medir las diagonales de uno o dos ejemplos concretos, dando así por concluida “la demostración”.

Thurston (1994) ha ofrecido una reflexión muy interesante sobre la naturaleza de las Matemáticas y en particular sobre la demostración. Thurston considera que plantear la pregunta ¿cómo se demuestra un teorema en Matemáticas?, al inicio de una reflexión sobre las Matemáticas resulta inoportuno, pues detrás de tal planteamiento se ocultan dos cosas: primero, que no hay una forma preestablecida y objetiva de llevar adelante la práctica de la demostración y, en segundo lugar, se oculta que el progreso en Matemáticas no necesariamente consiste en probar teoremas. A continuación nos propone un interrogante que contribuye a esclarecer su respuesta sobre la naturaleza de la disciplina: ¿qué hacen los matemáticos para que progrese la comprensión humana de las Matemáticas? Y se justifica diciéndonos que mediante este interrogante se trae a un primer plano algo que es fundamental y ubicuo: *Aquello que hacemos es, finalmente, hallar formas para que la gente entienda y piense sobre las Matemáticas.*

Se concluye entonces, que es el esfuerzo por *entender* lo que explica los procesos de exploración y de justificación lógica que subyacen a la construcción de una demostración matemática.

A menudo la demostración existe para el alumno como un ritual, un discurso que debe repetir o cuyo estilo debe imitar si se le pide probar un enunciado, más que como una herramienta explicativa basada en un sistema común de validación construido y aceptado por él y su grupo (Balacheff, 1982).

Referentes teóricos

Los SGD se caracterizan por poseer una pantalla gráfica sobre la que el usuario puede dibujar objetos geométricos primitivos (puntos, rectas, segmentos, etc.) y registrar relaciones geométricas entre ellos (perpendicularidad, paralelismo, etc.) a partir de un repertorio prefijado. Estas acciones producen construcciones geométricas más o menos complejas en las que algunos objetos pueden ser seleccionados por el usuario y "arrastrados" por la pantalla, manteniendo las relaciones geométricas establecidas en la construcción.

Se consideran los SGD enmarcados en el ámbito de los micro-mundos geométricos, uno de cuyos rasgos esenciales es que no hay objetivos didácticos predeterminados en el software, a diferencia de otro tipo de programas tipo "tutor" cuyo diseño incorpora de forma cerrada una intención didáctica clara. Esto hace que su eficacia educativa dependa esencialmente del uso que se haga de ellos. Según esto, el profesor, como responsable de la organización del proceso de enseñanza, es el encargado de hacer una elección precisa de entre un amplio abanico de posibilidades.

Usando un Sistema de Geometría Dinámica (SGD), como el Cabri-Géomètre, la evidencia perceptual de un resultado puede llegar a ser tan fuerte que incluso puede lograr que los estudiantes no lleguen a entender por qué es necesario demostrarlo. Hasta cierto punto, la eficiencia del software ha eliminado la necesidad de demostración (De Villiers, 1998). En la misma perspectiva también se afirma que la medición juega un papel importante en las estrategias de validación a las que recurren frecuentemente los estudiantes, es decir, la medición parece aportar un nivel de evidencia suficiente, no resulta fácil convencer a los alumnos de la necesidad de refinar la línea argumentativa, de manera que el problema didáctico de *cómo crear la necesidad de la demostración* recibe aquí un fuerte desafío (Moreno, 2002).

Parece importante, desde una perspectiva epistemológica, el que los profesores de Matemáticas traten de desarrollar comprensión y aprecio por estas otras funciones de la demostración (descubrimiento y explicación) para hacer de la misma una actividad más significativa para sus estudiantes. Sin embargo, si esperamos que los profesores lideren sus alumnos en el arte de resolver y proponer problemas y les permitan suficientes oportunidades para explorar, conjeturar, refutar, reformular, descubrir, explicar, sistematizar, etc., los propios profesores deberían haberse expuesto a cuestiones parecidas en su propio aprendizaje de las Matemáticas (De Villiers, 2000).El uso de software de geometría dinámica proporciona un entorno que muy probablemente facilitará el aprendizaje de la demostración en Geometría;

Es muy importante el papel de la exploración dinámica de la situación problemática para producir y probar conjeturas debe tomarse en cuenta; esto puede ayudar a seleccionar "áreas de experiencia" y tareas donde tales exploraciones dinámicas sean "naturales" para los estudiantes, además de ello, el fenómeno de una continuidad posible entre la producción de una conjetura y la construcción de su prueba debe ser considerada, con el propósito de poder seleccionar situaciones problemáticas apropiadas donde esta continuidad funcione suavemente ("Cognitive Unity of Theorems": Boero,Garuti et al, 1998), Es decir, que existe una unidad o ciclo del tipo:

explorar -» *conjeturar* -» *explorar* -» *organizar una demostración.*

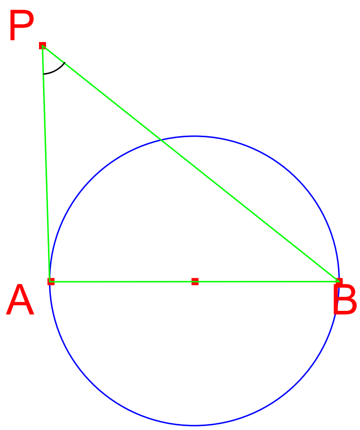
Las dos primeras partes del ciclo llevan a la producción de conjeturas a través de exploraciones, observaciones, reflexiones, discusiones sobre las afirmaciones (conjeturas) que se hacen y una sistematización progresiva de éstas. En la parte final se retoma la anterior para continuar una exploración, pero ya con la finalidad de encontrar argumentos pertinentes para la demostración y se hace el encadenamiento de los mismos. En el caso de que no se logre el objetivo, es decir que no se construya una demostración válida, entonces se debe retomar el ciclo.

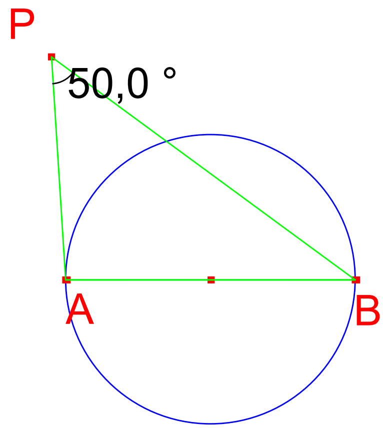
Resulta de vital importancia la forma de escribir una demostración, de tal forma que brinde facilidad para entenderla, para algunos profesores éste es un aspecto puramente formal y secundario en relación con lo que, desde el punto de vista didáctico, son los problemas claves, como por ejemplo, el poder determinar cómo aprenden a demostrar los estudiantes?.Si bien esta última cuestión es fundamental, también lo es la forma como son presentados los enunciados de las actividades demostrativas (Samper, 2006 & Radford, 1994).

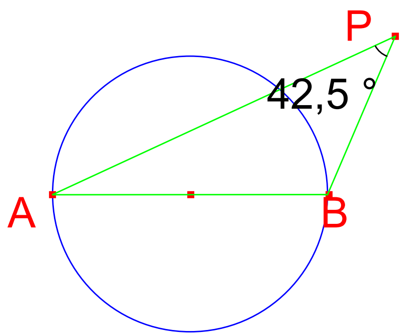
Metodología

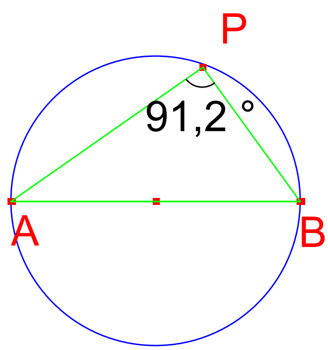
Los dibujos dinámicos ofrecen fenómenos visuales más fuertes que los que se hace con un dibujo estático. Una propiedad espacial puede surgir como invariante en el movimiento, lo cual puede ser imposible de percibir en un dibujo estático. Con el fin de ilustrar todo lo anterior se presentará una situación problema:

"Dado un punto P en el plano y una circunferencia con su diámetro horizontal AB. ¿Qué se puede decir del ángulo APB, para distintas posiciones de P en el plano?





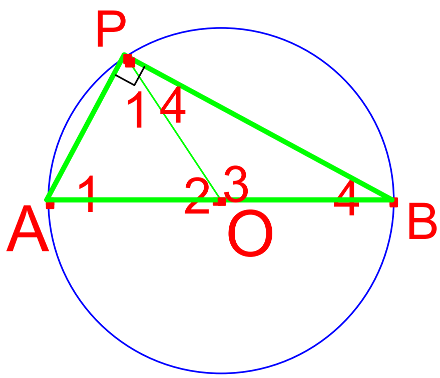




Gracias al arrastre del punto P, es estudiante puede explorar rápidamente qué ocurre con el ángulo APB para múltiples posiciones de P (cerca o alejado de la circunferencia, dentro de ella o sobre su perímetro) y comienza a establecer unas conjeturas iniciales. La primera de ellas podría ser de que el ángulo APB es agudo cuando el punto está por fuera de la circunferencia y que es obtuso cuando está dentro de ella, en el caso de que se encuentre sobre su perímetro no es tan contundente, pareciera ser recto, pero gracias a un comando de Cabri el punto P puede ser redefinido para que esté sobre el perímetro de la circunferencia y al arrastrarlo sobre la misma se "verifica" que efectivamente es recto.

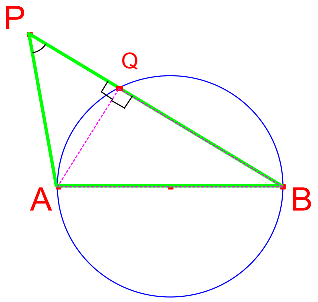
Ahora se plantea el reto al estudiante de ***explicar*** el ***por qué*** son verdaderos dichos resultados que hasta el momento simplemente han sido verificados empíricamente. Se les puede sugerir que partan por este último caso y luego aborden los otros dos.

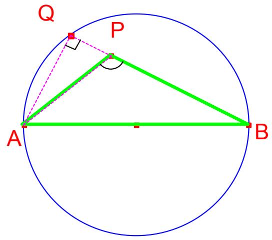
Luego de realizar algunas construcciones auxiliares y mediciones, encadenar relaciones, propiedades y otros hechos geométricos ya "demostrados" (teoremas anteriores), socializar y contrastar ideas entre ellos mismos puede surgir de una manera más natural la "explicación" requerida:



Trazando el radio OP, se observa que la semicircunferencia superior se ha formado dos triángulos isósceles, APO y BPO. Después de algunas inferencias lógicas se llega a establecer que el ángulo APQ es recto.

Para los otros dos casos, la explicación se apoya en el resultado anterior:





Conclusiones

* En el proceso seguido anteriormente se buscaba favorecer la construcción de un teorema y su demostración, no como un ejercicio que comienza con la declaración "demuestre que…" pues se le estaría pidiendo al estudiante que imagine, adivine o indague lo que pensaba un individuo cuando hizo una afirmación, con la clara desventaja de que tal afirmación fue hecha (seguramente) con la convicción de que era cierta. Es muy diferente a una situación más "experimental", donde el individuo, puesto en una situación en particular, observa los hechos, los analiza, los compara, encuentra un patrón y hace una afirmación, para posteriormente encontrar argumentos que la sustenten.

* Se tiene que considerar que existen demostraciones que "prueban", y que son utilizadas para ver que un hecho **es** verdadero, y demostraciones que "explican", que son utilizadas para ver **por qué** un hecho es verdadero (Arsac, 1987). Puede considerarse que éstas últimas son las que más interesan en educación, pues proporcionan un medio de explicación al alumno sobre la naturaleza de sucesos que ocurren sobre objetos abstractos y que no sólo proporcionan una razón (la más de las veces abstracta también) de que algo es verdadero.

* No es el software dinámico, ni la interacción espontánea la que puede generar explicaciones, sino el diseño guiado de la actividad, la retroalimentación del sistema, la contrastación y socialización de ideas con sus compañeros y el rol mediador del docente.

* Una condición necesaria para lograr enseñar demostraciones en contextos escolares es conseguir una esfera activa de trabajo, con muchas oportunidades de explorar y conjeturar.

Si un alumno descubre cierta propiedad por si mismo, estará más motivado hacia su comprensión y hacia la búsqueda de una demostración convincente.

Referencias Bibliográficas

ARSAC, G. (1987). El Origen de la Demostración: Ensayo de Epistemología Didáctica. Recherches en didactique des mathematiques, Vol. 8, no 3, pp. 267-312, Traducido por Martín Acosta.

BALACHEFF, N. (1982). Preuve et démonstration en Mathématique au collège. Recherches en Didactiques des Mathématiques. Nº 3.

BOERO, GARUTI & LEMUT. (1998). "Una hipótesis sobre la unidad cognoscitiva de teoremas". Preuve International Newsletter on teaching and learning of Mathematical proof. (Revista electrónica, URL: http//www.cabrinet/Preuve/Newsletter).

De Villiers, M. (2000) "Developing understanding of proof within the context of defining quadrilaterals". Contribution to: P. Boero, C. Maher, M. Miyazaki (organisers) "Proof and Proving in Mathematics Education". ICME-9, TSG 12. Tokio/Makuhari, Japón.

De VILLIERS, M (1998)."The future of secondary school". Preuve International Newsletter on teaching and learning of Mathematical proof. (Revista electrónica, URL:http//www.cabrinet/Preuve/Newsletter).

De VILLIERS, M (1993). "El papel de la Demostración en Matemáticas". Revista Epsilon. Nº.26, traducido por José María Álvarez Falcón.

MORENO. L (2002)."Instrumentos matemáticos computacionales". En MEN (2002) Memorias del seminario nacional de formación de docentes en el uso de Nuevas Tecnologías en el aula de Matemáticas. Serie memorias.

RADFORD, L. 1994. La Enseñanza de la Demostración: Aspectos teóricos y Prácticos. En Revista Educación Matemática, Vol. 6. Nº3. México

SAMPER, C et al. (2006). Actividad Demostrativa en la Formación Inicial del Profesor de Matemáticas. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá

THURSTON, W. (1994). On Proof and Progress in Mathematics. Bulletin of the American Mathematical Society, Vol.30, Nº 2.